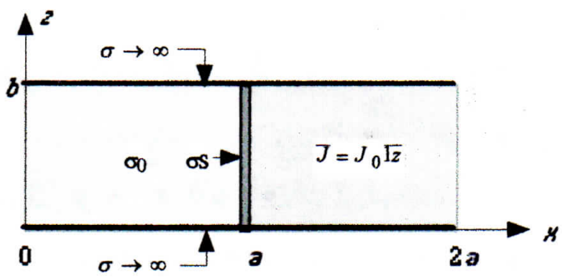
PARTE 2: PROBLEMAS (20 p)

Problema 1 (8 p)

La figura de la derecha muestra la sección transversal de un sistema infinito en dirección y, constituido por dos láminas de material conductor ideal en $0 < x < 2a$, $z = 0$ y $0 < x < 2a$, $z = b$; una fuente de corriente con densidad $\overline{J} = J_0 \overline{1z}$ en $a < x < 2a$, $0 < z < b$; un conductor volumétrico de conductividad σ_0 en $0 < x < a$, $0 < z < b$; y un conductor superficial de conductividad σ_S en $x = a$, $0 < z < b$.



a) (2 p) Sabiendo que el campo eléctrico dentro del sistema es $\overline{E} = -E_0 \overline{1z}$, determina las densidades de corriente de conducción dentro del sistema (excepto en los conductores ideales).

b) (6 p) Determina el campo magnético dentro del sistema utilizando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, suponiendo que no hay desbordamiento.

c) (1 p, opcional) Determina la densidad de corriente superficial en la lámina conductora ubicada en $z = 0$.

d) (1 p, opcional) Determina la relación existente entre J_0 y E_0.

Problema 2 (6 p)

Se tiene un sistema con simetría esférica, con una densidad de polarización dada por $\overline{P} = P_0 (r/a) \overline{1r}$ en $r < a$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. El resto del espacio está vacío.

a) (2 p) Determina las densidades de carga equivalente de polarización del sistema.

b) (4 p) Determina el campo eléctrico producido por esta polarización en todo el espacio, utilizando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

Problema 3 (6 p)

Se tiene un sistema con simetría cilíndrica, con una densidad de magnetización dada por $\overline{M} = M_0 \overline{1z}$ en $a < r < b$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $|z| < \infty$. El resto del espacio está vacío.

a) (2 p) Determina las densidades de corriente equivalente de magnetización del sistema, según el modelo amperiano.

b) (4 p) Determina el campo magnético producido por esta magnetización en todo el espacio.

EC1311 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DEL 20-02-04

PROBLEMA 1 (8 p)

a) (2 p) Las densidades de corriente de conducción se determinan aplicando la Ley de Ohm:

En $0<x<a$, $0<z<b$: $\bar{J}_c = \sigma_0 \bar{E} = -\bar{1}_z \sigma_0 E_0$

En $x=a$, $0<z<b$: $\bar{K}_c = \sigma_s \bar{E} = -\bar{1}_z \sigma_s E_0$

b) (6 p)

1p $\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}(x) \text{ por la geometría y las densidades de corriente} \\ H_x = H_z = 0 \text{ por la regla de la mano derecha.} \\ \text{Entonces } \bar{H} = \bar{1}_y H_y(x) \end{cases}$

3p: Para calcular $H_y(x)$ se aplica la Ley de Ampère en forma diferencial $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_s + \bar{J}_c$ (régimen estático)

Sustituyendo:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{1}_z \frac{\partial H_y}{\partial x} = \begin{cases} \bar{J}_c = -\bar{1}_z \sigma_0 E_0, \text{ en } 0<x<a,\ 0<z<b \\ \bar{J}_s = \bar{1}_z J_0, \text{ en } a<x<2a,\ 0<z<b \end{cases}$$

Resolviendo:

$$H_y(x) = \begin{cases} -\sigma_0 E_0 x + C_1, \text{ en } 0<x<a,\ 0<z<b \\ J_0 x + C_2, \text{ en } a<x<2a,\ 0<z<b \end{cases}$$

2p: Para determinar las constantes C_1 y C_2, se aplica condiciones de frontera. Se supone que $\bar{H} = \bar{0}$ fuera del sistema (no hay desbordamiento)

En $x=0$: $\bar{1}_x \times [\bar{H}|_{0^+} - \cancel{\bar{H}|_{0^-}}^{\bar{0}}] = \bar{K}|_0 = \bar{0} \Rightarrow C_1 = 0$

En $x=2a$: $\bar{1}_x \times [\bar{H}|_{2a^+} - \bar{H}|_{2a^-}] = \bar{K}|_{2a} = \bar{0} \Rightarrow C_2 = -2J_0 a$

Luego: $$\bar{H} = \begin{cases} -\bar{1}_y \sigma_0 E_0 x, \text{ en } 0<x<a,\ 0<z<b \\ -\bar{1}_y J_0 (2a - x), \text{ en } a<x<2a,\ 0<z<b \end{cases}$$

c) (1p, opcional)

Para determinar $\overline{K}$, se aplica la condición de frontera

$$\overline{I}_z \times [\overline{H}|_{0^+} - \cancel{\overline{H}|_{0^-}}^{\,0}] = \overline{K}$$

Para $0<x<a$:

$$\overline{K} = \overline{I}_z \times (-\overline{I}_y \sigma_o E_o x) = \overline{I}_x \sigma_o E_o x$$

$a<x<2a$: $\overline{K} = \overline{I}_z \times (-\overline{I}_y J_o (2a-x)) = \overline{I}_x J_o (2a-x)$

d) (1p, opcional)

Para determinar la relación existente entre J_o y E_o, se aplica la condición de frontera para $\overline{H}$ en $x=a$:

$$\overline{I}_x \times [\overline{H}|_{a^+} - \overline{H}|_{a^-}] = \overline{K}|_a = -\overline{I}_z \sigma_s E_o$$

Sustituyendo:

$$\overline{I}_x \times [+\overline{I}_y \sigma_o E_o a - \overline{I}_y J_o a] = -\overline{I}_z \sigma_s E_o$$

$$+\overline{I}_z \sigma_o E_o a - \overline{I}_z J_o a = -\overline{I}_z \sigma_s E_o$$

$$J_o = E_o \left(\sigma_o + \frac{\sigma_s}{a} \right)$$

PROBLEMA 2 (6p)

a) Las densidades de carga equivalente de polarización son:

(2p) $\rho_p = -\nabla \cdot \overline{P}$; $\eta_p = -\overline{I}_n \cdot [\overline{P}|_{s^+} - \overline{P}|_{s^-}]$

En $0<r<a$, $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi<2\pi$:

$$\rho_p = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_o \frac{r}{a}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{P_o}{a} 3r^2 = -\frac{3P_o}{a}$$

En $r=a$, $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi<2\pi$:

$$\eta_p = -\overline{I}_r \cdot [\cancel{\overline{P}|_{a^+}}^{\,0} - \overline{P}|_{a^-}] = P_o$$

b) (4p)

1p: Por geometría y densidades de carga, $\overline{E} = \overline{E}(r)$

Por simetría rotacional (también Ley de Faraday en régimen estático cuando $\overline{E} = \overline{E}(r)$): $E_\theta = E_\varphi = 0$

Entonces $\overline{E} = E_r(r)\overline{I}_r$

2p

Para determinar $E_r(r)$, se aplica la Ley de Gauss en forma diferencial, $\nabla\cdot\epsilon_0\bar{E} = \cancel{\rho}^{0} + \rho_p$ (no hay cargas libres)

Para $0<r<a$:

$$\epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = -\frac{3P_0}{a}$$

$$r^2 E_r = -\frac{3P_0}{a\epsilon_0}\int r^2 dr + C_1 = -\frac{P_0}{a\epsilon_0} r^3 + C_1$$

$$E_r = -\frac{P_0}{a\epsilon_0} r + \frac{C_1}{r^2}$$

Para $r>a$

$$\epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = 0 \Rightarrow E_r = \frac{C_2}{r^2}$$

1p

Cálculo de C_1:

$$\lim_{r\to 0} |\bar{E}| \neq \infty \text{ (no hay carga puntual en } r=0) \Rightarrow C_1 = 0$$

Cálculo de C_2: se aplica condición de frontera

$$\bar{I}_r\cdot\left[\epsilon_0\bar{E}\Big|_{a^+} - \epsilon_0\bar{E}\Big|_{a^-}\right] = \cancel{\eta}^{0} + \eta_p = P_0$$

$$\epsilon_0\frac{C_2}{a^2} + \cancel{\epsilon_0}\frac{P_0}{\cancel{a}\cancel{\epsilon_0}}\cancel{a} = P_0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Finalmente:

$$\bar{E} = \begin{cases} -\bar{I}_r \dfrac{P_0}{\epsilon_0}\left(\dfrac{r}{a}\right), \text{ si } r<a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi<2\pi \\ \bar{0}, \text{ si } r>a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi<2\pi \end{cases}$$

PROBLEMA 3 (6 p)

a) (2 p)

Las densidades de corriente equivalente del modelo amperiano son: $\bar{J}_a = \nabla \times \bar{M}$; $\bar{K}_a = \bar{I}_n \times [\bar{M}|_{s^+} - \bar{M}|_{s^-}]$

En $a<\rho<b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|z|<\infty$:

$\bar{J}_a = \nabla \times (M_0 \bar{I}_z) = \bar{0}$

En $\rho = a$; $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|z|<\infty$:

$\bar{K}_a = \bar{I}_\rho \times (\bar{M}|_{a^+} - \cancel{\bar{M}|_{a^-}}^{\bar{0}}) = \bar{I}_\rho \times M_0 \bar{I}_z = -\bar{I}_\varphi M_0$

En $\rho = b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|z|<\infty$:

$\bar{K}_a = \bar{I}_\rho \times (\cancel{\bar{M}|_{b^+}}^{\bar{0}} - \bar{M}|_{b^-}) = -\bar{I}_\rho \times M_0 \bar{I}_z = +\bar{I}_\varphi M_0$

b) (4 p)

1p: Para determinar $\bar{H}$, se hace primero el estudio de coordenadas y componentes nulas

$\left.\begin{array}{l} \bar{H} = \bar{H}(\rho) \text{ por geometría de las corrientes} \\ H_\varphi = 0 \text{ por regla de la mano derecha} \\ H_\rho = 0 \text{ por Ley de Gauss cuando } \bar{H} = \bar{H}(\rho) \end{array}\right\} \bar{H} = \bar{I}_z H_z(\rho)$

2p: Para calcular H_z, se aplica Ley de Ampère.

En forma diferencial: $\nabla \times \bar{H}_a = \cancel{\bar{J}}^{\bar{0}} + \cancel{\bar{J}_\alpha}^{\bar{0}}$

$\nabla \times \bar{H}_a = -\bar{I}_\varphi \dfrac{\partial H_z}{\partial \rho} = \bar{0} \Rightarrow H_z = cte$

$$H_z = \begin{cases} C_1 & \text{si } 0<\rho<a,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ |z|<\infty \\ C_2 & \text{si } a<\rho<b,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ |z|<\infty \\ C_3 & \text{si } \rho>b,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ |z|<\infty \end{cases}$$

1p: Cálculo de C_3: $\lim_{\rho \to \infty} \bar{H} = \bar{0} \Rightarrow C_3 = 0$

Para calcular C_1 y C_2 se aplica condiciones de frontera:

En $\rho = b$: $\bar{I}_\rho \times [\cancel{\bar{H}_a|_{b^+}}^{\bar{0}} - \bar{H}_a|_{b^-}] = \bar{K}_a|_b = \bar{I}_\varphi M_0 = \bar{I}_\rho \times (-\bar{I}_z C_2) \Rightarrow C_2 = M_0$

En $\rho = a$: $\bar{I}_\rho \times [\bar{H}_a|_{a^+} - \bar{H}_a|_{a^-}] = \bar{K}_a|_a = -\bar{I}_\varphi M_0 = \bar{I}_\rho \times [M_0 \bar{I}_z - C_1 \bar{I}_z] \Rightarrow C_1 = 0$

Finalmente: $\bar{H}_a = M_0 \bar{I}_z$ en $a<\rho<b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|z|<\infty$; $\bar{H}_a = \bar{0}$ en el resto